Trabajo Práctico Nro. 3

Integrales Complejas

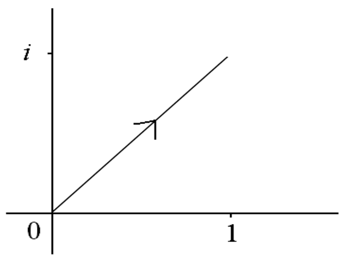
1. Calcular las siguientes integrales:

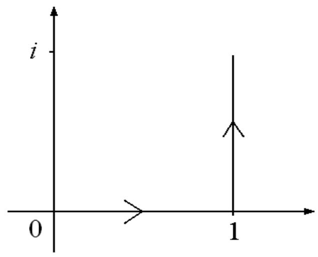
(a) $\displaystyle\int_0^1 (1+it^2)dt$ (b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi/4} te^{-it^2}dt$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi} (\mathrm{sen}2t + i\cos 2t)dt$ (d) $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{Log}(1+it)dt$

2. Calcular las siguientes integrales de línea:

(a) $\displaystyle\int_C \mathrm{Re}(z)\ dz$ a lo largo de las siguientes trayectorias:





(b) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z}\ dz$ C: semicircunf. superior de $|z|=1$ desde $z_1=-1$ hasta $z_2=1$.

(c) $\displaystyle\int_C (2|z|+3)\ dz$ C: segmento del eje real que une $z_1=-1$ y $z_2=2$.

(d) $\displaystyle\int_C \pi\, e^{(\pi\bar{z})}\ dz$ C: borde del cuadrado de vértices $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=1+i$ y $z_4=i$, recorrido en sentido positivo.

3. Mostrar que para $m,n\in\mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{im\theta}e^{-in\theta}d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si}\, m\neq n \\ 2\pi & \text{si}\, m = n \end{cases}$ y obtener el valor de $\displaystyle\int_\gamma z^m\bar{z}^n\ dz$ siendo γ la circunferencia centrada en el origen, de radio r, recorrida en sentido antihorario.

4. Sea la circunferencia $C: z-a = r_0e^{i\theta}$ donde $r_0>0$ y $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, recorrida en sentido positivo. Demostrar que $\displaystyle\int_C f(z)\ dz = ir_0\int_0^{2\pi} f(a+r_0e^{i\theta})\, e^{i\theta}\ d\theta$.

5. Sea $f : \mathrm{A} \to \mathbb{C}$, $f = u + i\,v$ continua en A y γ una curva simple orientada incluída en A. Demostrar que $\mathrm{Re}\,(\int_\gamma f(z)dz)$ y $\mathrm{Im}\,(\int_\gamma f(z)dz)$ dan respectivamente, la circulación a lo largo de γ y el flujo del campo vectorial $(u, -v)$ a través de γ.

6. Calcular la longitud del arco del cicloide, curva cerrada parametrizada como: $z(t) = a(t - \operatorname{sen} t) + a\,i(1 - \cos t), (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ con a un real positivo.

7. Sin calcular la integral, obtener las siguientes acotaciones:

   (a) $\left|\int_C \frac{1}{z^4}\,dz\right| \leqslant 4\sqrt{2}$ $\quad C$: segmento que une los puntos $z_1 = i$ y $z_2 = 1$.

   (b) $\left|\int_C \frac{\bar{z}}{\bar{z}+1}\,dz\right| \leqslant \frac{8}{3}\pi$ $\quad C$: circunferencia $|z| = \frac{2}{3}$, recorrida en sentido positivo.

   (c) $\left|\int_C \frac{1}{z^2+1}\,dz\right| \leqslant \frac{\pi}{3}$ $\quad C$: circunferencia $|z| = 2$, en el primer cuadrante.

8. Sea γ la semicircunferencia superior de $|z| = R$. Probar que:

   (a) $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\,dz = 0$ $\qquad$ (b) $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_\gamma \frac{\operatorname{Log} z}{z^2}\,dz = 0$

9. Evaluar (i) $\int_C \frac{z-2}{z}\,dz$ y (ii) $\int_{-C} |z|^{1/2} \exp(i\,\mathrm{Arg} z)\,dz$ donde C es la semicircunferencia $z = 2e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

10. Calcular la integral $\int_\gamma \frac{dz}{z-c}$ con γ un contorno que encierra a $z_0 = c$, recorrido una vez en sentido antihorario. Analizar en qué varía el resultado si se recorre γ n-veces, $n \in \mathbb{N}$. ¿Contradice la independencia de la parametrización?

11. Clasificar a los conjuntos conexos del ejercicio 21 (a) del Trabajo Práctico Nro. 2 en simplemente o multiplemente conexos.

12. Denotamos $\mathcal{H}(D) = \{f : D \to \mathbb{C}$ holomorfas en $\mathbb{C}\}$. Decir qué condiciones debe cumplir un conjunto D de $\mathbb{C}$ para que:

    (a) si $f \in \mathcal{H}(D)$, entonces cualquiera sea el contorno cerrado $\Gamma \subseteq D$, resulta $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$, (confrontar con el ejercicio 3)

    (b) si f es continua en D, y para todo contorno cerrado $\Gamma \subseteq D$, $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$, entonces $f \in \mathcal{H}(D)$.

13. (a) Explicar bajo qué condiciones es válido $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\lambda f(z)\,dz$, para dos curvas $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\lambda : [a,b] \to \mathbb{C}$ tales que $\gamma(a)=\lambda(a)$ y $\gamma(b)=\lambda(b)$ (independencia del camino).

    (b) Analizar si es posible utilizar, y cómo, el resultado del ejercicio 2 (b) para calcular:

    (i) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z}\,dz$ $\quad C$: semicircunf. inferior de $|z|=1$ desde $z_1=1$ hasta $z_2=-1$.

    (ii) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z}\,dz$ $\quad C$: curva definida por $x^4+y^4=1$ desde $z_1=-1$ hasta $z_2=1$.

14. Calcular, en cada caso, la integral de línea de la función f a lo largo de los contornos C indicados:

    (a) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z+2}$ $\qquad C=\{z\in\mathbb{C}/\ |z|=1\}$.

    (b) $f(z)=z^3$ $\qquad$ (i) $C=\{z\in\mathbb{C}/\ |z|=1\}$,
    (ii) C: recta que une los puntos $z=1$ y $z=i$,
    (iii) C: arco de circunferencia de centro 0 y radio 1 que une los puntos $z=1$ y $z=i$,
    (iv) C: un contorno que une los puntos $z=1$ y $z=i$.

    (c) $f(z)=z\operatorname{sen}(z^2)$ $\qquad C$: contorno que une los puntos $z=-i\pi$ y $z=i\pi$.

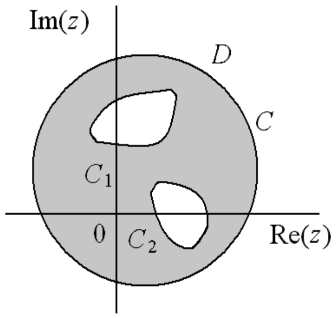
15. Sea $D=\{z\in\mathbb{C} : 1<|z|<2\}$ y γ la frontera de D, orientada de modo que los puntos de D están a la izquierda de γ. Probar que $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ para:

    (a) $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2+9}$ $\qquad$ (b) $f(z)=\operatorname{ctg} z$

16. Calcular, si es posible, $\displaystyle\int_C f(z)dz$ siendo $f(z)=z^i$ (valor principal) según sea:

    (a) C: contorno en el semiplano superior que une los puntos $z=1$ y $z=-1$.
    (b) C: contorno en el semiplano inferior que une los puntos $z=1$ y $z=-1$.
    (c) C: cualquier contorno que une los puntos $z=1$ y $z=-1$.

17. (a) Sean D y los contornos C, C_1 y C_2 como se indican en la figura que sigue. Probar que si f es holomorfa en D y continua sobre los contornos C, C_1 y C_2, el valor de la integral de f sobre la frontera de D es cero (o sea que bajo estas condiciones, se puede extender el teorema de Cauchy a dominios múltiplemente conexos). Deducir la relación entre las integrales de f sobre C, C_1 y C_2.

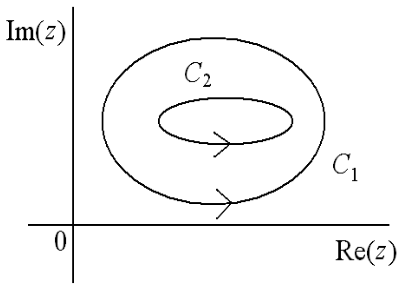


(b) Mostrar:

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2-1} dz = \int_{|z-1|=1/2} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2-1} dz + \int_{|z+1|=1/2} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2-1} dz$$

(c) Analizar bajo qué condiciones $\displaystyle\int_{C_1} f(z)\ dz = \int_{C_2} f(z)\ dz$ siendo

$f(z) = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ y C_1 y C_2 como se indican en el gráfico:



18. Aplicando la fórmula integral de Cauchy, integrar la función $f(z) = \dfrac{2z^2-4}{z^2+1}$ a lo largo del círculo de radio 1 y recorrido una vez en sentido antihorario, con centro en:

    (a) $z=i$ (b) $z=\dfrac{1}{2}$ (c) $z=-i$

19. Calcular las siguientes integrales:

    (a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z^2+4}{z}\ dz$ (b) $\displaystyle\int_{|z|=4} \left(\frac{\cos(\pi z)}{z+1} + \frac{2e^z}{z-3}\right) dz$ (c) $\displaystyle\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\operatorname{Log}(z+2)}{(z+1)(z^2+4)}\ dz$

20. Calcular todos los posibles valores de la integral $\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{dz}{z\,(z^2-1)}$ para diferentes contornos cerrados Γ que no pasen por $0, 1$ y -1.

21. Calcular la integral de línea de las siguientes funciones:

    (i) $f(z) = \dfrac{z^3 - z}{(z+1)^2}$ (ii) $f(z) = \dfrac{z^4}{(z-1)^2(z-3)}$

    (iii) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z}{(z^2-1)^2}$ (iv) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^n}$ para $n > 0$

    sobre el círculo de radio 2 y centro en: (a) $z = 0$, (b) $z = 2 + i$.

22. Mostrar que si $f(z)$ es holomorfa en $\Gamma \cup \operatorname{int}(\Gamma)$ donde Γ es un contorno cerrado en $\mathbb{C}$, entonces $\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}\, dz = \int_\Gamma \frac{f'(z)}{(z-a)}\, dz, \quad \forall\, a \notin \Gamma.$

23. Probar que si $f(z)$ es holomorfa en un dominio D y si el disco cerrado $|z-a| \leqslant R$ está en D, entonces $f(a) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(a + Re^{it})\, dt.$

    Este resultado puede interpretarse como un teorema del valor medio que expresa el valor de f en el centro de la circunferencia como un “promedio” de los valores sobre la misma.

24. Sea $f(z)$ una función holomorfa en $|z - a| < R$. Si $0 < r < R$, demostrar que $f'(a) = \dfrac{1}{2\pi r}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, e^{-it}\, dt.$

25. Explicar por qué si $f = u + iv$ es holomorfa en un dominio D, existen todas las derivadas parciales de u y de v y son continuas en D.

26. Demostrar que si f es holomorfa en $|z - z_0| < R$ y continua en $|z - z_0| = R$ con $|f(z)| \le M$ en $|z - z_0| = R$, entonces

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!M}{R^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

27. Probar que si $f(z)$ es holomorfa y $|f(z)| < \dfrac{1}{1 - |z|}$ en $B(0,1)$ entonces $|f'(0)| \le 4$.

28. Justificar que, a excepción de la función nula, no existe función entera que tenga límite 0 en ∞.

29. (a) Hallar el máximo de $|ze^z + z^2|$ y el de $|iz^2 - 2z|$ sobre el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1 \text{y } \operatorname{Im}(z) \ge 0\}$

    (b) Hallar el máximo de $|\cos z|$ sobre el cuadrado $\{z \in \mathbb{C} : 0 \le \operatorname{Re} z \le 2\pi, 0 \le \operatorname{Im} z \le 2\pi\}$

30. Sea f holomorfa en $B(0,1)$ tal que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \le 1$ si $|z| < 1$. Probar que $|f(z)| \le |z|$ si $|z| < 1$ y $|f'(0)| \le 1$. (Sugerencia: considerar $\dfrac{f(z)}{z}$ en $\bar{B}(0,r)$).

31. Mostrar que si f es una función entera tal que $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$ para todo z complejo, entonces f es constante.

32. Supongamos que $f(z)$ y $g(z)$ son continuas en $\bar{B}(0,r)$ y holomorfas en $B(0,r)$ con $f(z) \neq 0$ y $g(z) \neq 0$ $\forall z \in \bar{B}(0,r)$. Si $|f(z)| = |g(z)|$ en $|z| = r$, probar que existe una constante c tal que $|c| = 1$ y $f(z) = cg(z)$ $\forall z \in \bar{B}(0,r)$.

Funciones Armónicas

33. Determinar si las siguientes funciones son armónicas indicando el dominio en que lo son.
    (a) $u(x,y) = e^{-x}\cos y$
    (b) $u(x,y) = e^{x}\,(x\cos y - y\,\mathrm{sen}\, y)$
    (c) $v(x,y) = x^2 - y^2 + e^x\cos y + x$
    (d) $v(x,y) = e^{xy}\,cos(x^2 - y^2)$
    (e) $u(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$
    (f) $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$
    (g) $v(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

34. Hallar una función holomorfa $u + i\,v$ tal que su parte real (respectivamente, su parte imaginaria) coincida con la función u (respectivamente, v) de cada ítem del ejercicio 31. Especificar su dominio de holomorfía.

35. Establecer las condiciones que deben cumplir a, b y $c \in \mathbb{R}$ para que las siguientes funciones sean armónicas en $\mathbb{R}^2$:
    (a) $u(x,y) = ax + bxy + cy$
    (b) $u(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$

36. Probar que si $\phi(x,y)$ es armónica en un dominio S entonces $\psi = \phi_x - i\phi_y$ es holomorfa en S (la función ψ se llama el gradiente conjugado de ϕ).

37. Justificar por qué si $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ es holomorfa, la función $3u^2\,v – v^3$ es armónica respecto a (x,y).

38. ¿Es la suma de funciones armónicas en un dominio D una función armónica en D? ¿Qué se puede decir respecto al producto?

39. (a) ¿Es cierto que si las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son armónicas conjugadas en un dominio D del plano entonces $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es holomorfa en D?
    (b) Explicar por qué una función armónica en un dominio D admite una conjugada armónica local en D.

40. Obtener una conjugada armónica de $x^2 - y^2 + e^{2\pi(x-1)}\cos(2\pi y)$. Hallar la curva ortogonal a la curva definida por $x^2 - y^2 + e^{2\pi(x-1)}\cos(2\pi y) = 1$ en $(1,1)$.

41. (a) Probar que la ecuación de Laplace en coordenadas polares es: $r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$.
    (b) Caracterizar las funciones armónicas $u = u(r)$. Lo mismo si $u = u(\theta)$.
    (c) Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $u_n(r,\theta) = r^n(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)$. Probar que $u_n(r,\theta)$ es armónica y hallar su conjugada armónica $\tilde{u}_n(r,\theta)$.
    (d) Comprobar que $u(x,y) = (x^2+y^2)\cos(2\operatorname{arctg}(y/x))$ es armónica.

Aplicaciones sobre armónicas conjugadas

42. En un cierto medio donde la constante de conductividad térmica es igual a 0.1, las componentes del flujo de calor están dadas por $Q_x \equiv 3$ y $Q_y \equiv -4$. Hallar la distribución de temperatura $\phi(x,y)$, suponiendo que $\phi(0,0) = 0$ y la función de flujo $\psi(x,y)$ tal que $\psi(0,0) = 0$. Describir y graficar las líneas isotérmicas y las líneas de flujo.

43. Sea $\phi(x,y) = 2x - 6y$ la distribución de temperatura estacionaria de un sólido bidimensional. ¿Cuál es la temperatura compleja? Describir las líneas isotérmicas y las líneas de flujo.

44. El potencial complejo de un flujo de fluido está dado por $\Phi(z) = 1/z$ para $z \neq 0$. Hallar la velocidad compleja. Mostrar que la curva equipotencial que pasa por $(1,1)$ es $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Obtener la línea de coriente que pasa por $(1,1)$. Graficar ambas curvas.

45. Encontrar el potencial complejo de un fluido que se mueve con velocidad constante υ_0 y cuya dirección forma un ángulo θ con el semieje real positivo. Hallar las componentes del campo de velocidad. Esbozar las curvas equipotenciales y las líneas de corriente.

46. Explicar por qué $d(x,y) = y + ix$ puede ser un flujo eléctrico complejo pero no puede serlo $\bar{d}(x,y) = x + iy$. Hallar el potencial electrostático, las curvas equipotenciales y las líneas de corriente asociadas a $d(x,y)$.

47. Determinar si las siguientes ecuaciones describen las líneas de corriente de un fluido ideal. En caso afirmativo, calcular el correspondiente potencial complejo:
    (i) $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x+1}\right) = cte$,
    (ii) $\dfrac{x-y}{x^2+y^2} = cte$,
    (iii) $e^{(x^2-y^2)}\operatorname{sen}(2xy) + x^2 - y^2 = cte$